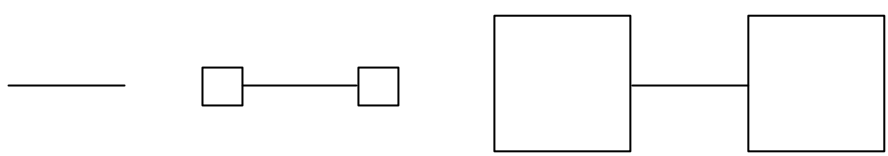
Bedingte Varianz und Kovarianz

Worum geht es in diesem Modul?

- Beispiel: Baldwin-Täuschung
- Bedingte Varianz und Kovarianz
- Eigenschaften der bedingten Varianz und der bedingten Kovarianz
- Bedingte Korrelationen und Partialkorrelation
- Das Webersche Gesetz für Herstellungsexperimente

Beispiel: Baldwin-Täuschung I



(a) $X = 1$ (b) $X = 2$ (c) $X = 3$

Abbildung 12.1. Drei Baldwin-Figuren.

Beispiel: Baldwin-Täuschung II

Tabelle 12.1. Bedingte Verteilungen der Urteile.

Y (Urteil in mm)	$P(Y = y \mid X = 1)$	$P(Y = y \mid X = 2)$	$P(Y = y \mid X = 3)$
13	0,1	0,0	0,1
14	0,2	0,0	0,2
15	0,4	0,05	0,4
16	0,2	0,1	0,2
17	0,1	0,2	0,1
18	0,0	0,3	0,0
19	0,0	0,2	0,0
20	0,0	0,1	0,0
21	0,0	0,05	0,0

Baldwin-Täuschung: mögliche Werte

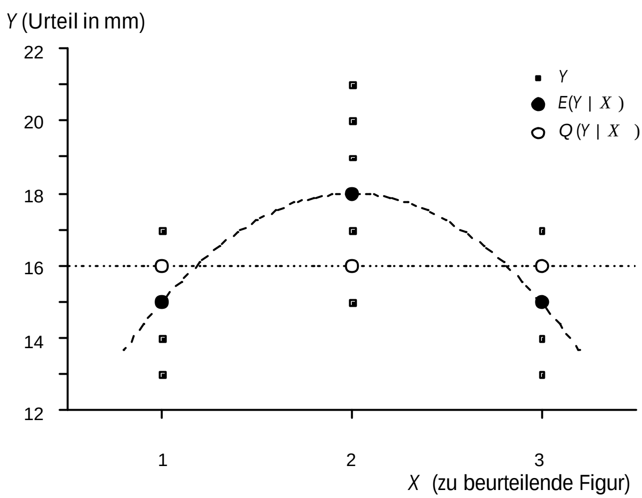


Abbildung 12.2. Idealisierte Darstellung der möglichen Werte der Urteilsvariablen Y für die drei zu beurteilenden Figuren.

Baldwin Illusion: bedingte Varianz

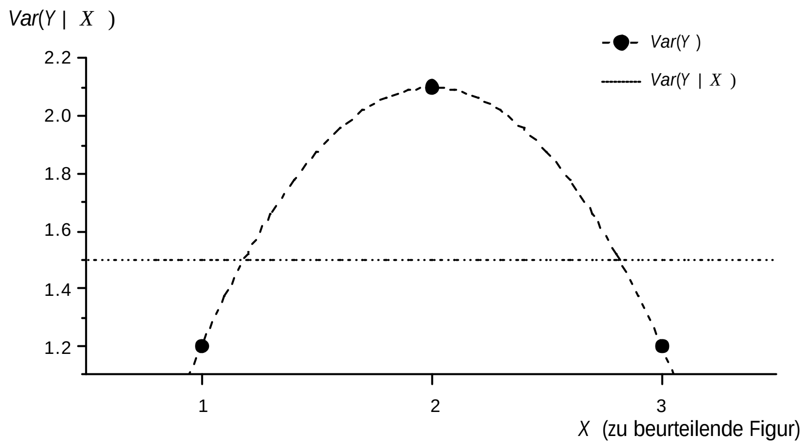


Abbildung 12.3. Darstellung der bedingten Varianz der Urteilsvariablen Y für die drei verschiedenen Werte von X.

Bedingte Kovarianz: Definition

Definition 12.1. Seien Y_1 und Y_2 zwei numerische Zufallsvariablen mit endlichen Erwartungswerten und endlichen Varianzen und X eine (ein- oder mehrdimensionale) Zufallsvariable (mit beliebiger Wertemenge), alle drei auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum. Außerdem seien:

$$e_1 := Y_1 - E(Y_1 \mid X) \quad \text{und} \quad e_2 := Y_2 - E(Y_2 \mid X)$$

die Residuen von Y_1 bzw. Y_2 bezüglich ihrer Regression auf X. Die bedingte Kovarianz von Y_1 und Y_2 gegeben X ist dann definiert durch:

$$Cov(Y_1, Y_2 \mid X) := E\big[[Y_1 - E(Y_1 \mid X)] \cdot [Y_2 - E(Y_2 \mid X)] \,\big|\, X\big]$$

$$= E(e_1 \cdot e_2 \mid X)$$

Bedingte Varianz: Definition

Definition 12.2. Seien Y eine numerische Zufallsvariable mit endlichem Erwartungswert und endlicher Varianz und X eine (ein- oder mehrdimensionale) Zufallsvariable (mit beliebiger Wertemenge), beide auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum. Die *bedingte Varianz* von Y gegeben X ist dann die bedingte Kovarianz von Y mit sich selbst. In Formeln:

$$Var(Y|X) := Cov(Y, Y|X).$$

Die *bedingte Streuung* oder *bedingte Standardabweichung von Y gegeben X* ist definiert durch:

$$Std(Y|X) := +\sqrt{Var(Y|X)},$$

d.h. als positive Quadratwurzel aus der bedingten Varianz $Var(Y|X)$.

Bedingte Varianz: Rechenregeln

(i) $Var(Y|X) = E(Y^2|X) - E(Y|X)^2$

(ii) $Var(Y|X) = 0$, falls $Y = \alpha$

(iii) $Var(\alpha + Y|X) = Var(Y|X)$

(iv) $Var(\alpha \cdot Y|X) = \alpha^2 \, Var(Y|X)$

(v) $Var(\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 | X)$

$$= \alpha_1^2 \, Var(Y_1|X) + \alpha_2^2 Var(Y_2|X) + 2\alpha_1\alpha_2 Cov(Y_1, Y_2|X)$$

(vi) $Var[f(X) \cdot Y|X] = f(X)^2 \cdot Var(Y|X)$

(vii) $E[Var(Y|X)] = Var(e) = E(e^2)$

Bedingte Kovarianz: Rechenregeln

(viii) $Cov(Y_1, Y_2 \mid X) = E(Y_1 \cdot Y_2 \mid X) - E(Y_1 \mid X) \cdot E(Y_2 \mid X)$

(ix) $Cov(Y_1, Y_2 \mid X) = 0$, falls $Y_1 = \alpha$ oder $Y_2 = \alpha$

(x) $Cov(\alpha_1 + Y_1, \alpha_2 + Y_2 \mid X) = Cov(Y_1, Y_2 \mid X)$

(xi) $Cov(\alpha_1 Y_1, \alpha_2 Y_2 \mid X) = \alpha_1 \alpha_2 Cov(Y_1, Y_2 \mid X)$

(xii) $Cov(\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2, \beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2 \mid X)$

$$= \alpha_1 \beta_1 \, Cov(Y_1, Z_1 \mid X) + \alpha_1 \beta_2 \, Cov(Y_1, Z_2 \mid X)$$

$$+ \alpha_2 \beta_1 \, Cov(Y_2, Z_1 \mid X) + \alpha_2 \beta_2 \, Cov(Y_2, Z_2 \mid X)$$

(xiii) $Cov[f_1(X) \cdot Y_1, f_2(X) \cdot Y_2 \mid X] = f_1(X) \cdot f_2(X) \cdot Cov(Y_1, Y_2 \mid X)$.

(xiv) $E[Cov(Y_1, Y_2 \mid X)] = Cov(e_1, e_2) = E(e_1 \cdot e_2)$

Bedingte Korrelation: Definition

Definition 12.3. Unter den gleichen Voraussetzungen wie in Definition 12.1. ist die *bedingte Korrelationsfunktion* zweier numerischer Zufallsvariablen Y_1 und Y_2 gegeben X definiert durch:

$$Kor(Y_1, Y_2 \mid X) := \frac{Cov(Y_1, Y_2 \mid X)}{Std(Y_1 \mid X) \cdot Std(Y_2 \mid X)},$$

und die *bedingte Korrelation* gegeben $X = x$ durch:

$$Kor(Y_1, Y_2 \mid X = x) := \frac{Cov(Y_1, Y_2 \mid X = x)}{Std(Y_1 \mid X = x)\, Std(Y_2 \mid X = x)} .$$

Partialkorrelation: Definition

Definition 12.3. Unter den gleichen Voraussetzungen wie in Definition 12.1 ist die *Partialkorrelation* zweier numerischer Zufallsvariablen Y_1 und Y_2 bzgl. X definiert durch

$$Kor(Y_1, Y_2 \,.\, X) := \frac{Cov(e_1, e_2)}{Std(e_1) \cdot Std(e_2)},$$

wobei e_i , $i = 1, 2$, das Residuum bzgl. der Regression $E(Y_i \mid X)$ ist.

Partialkorrelation: Theorem

Theorem 12.1. Für die Partialkorrelation zweier numerischer Zufallsvariablen Y_1 und Y_2 bzgl. X gilt:

$$Kor(Y_1, Y_2 \,.\, X) = \frac{Kor(Y_1, Y_2) - R_{Y_1|X} \, R_{Y_2|X} \, Kor[E(Y_1 \mid X), E(Y_2 \mid X)]}{\sqrt{1 - R^2_{Y_1|X}} \cdot \sqrt{1 - R^2_{Y_2|X}}}.$$

Dabei bezeichnen $R^2_{Y_1|X}$ und $R^2_{Y_2|X}$ die Determinationskoeffizienten der beiden Regressionen $E(Y_i \mid X)$. Im Fall, dass die Regressionen $E(Y_i \mid X) = \alpha_{i0} + \alpha_{i1}X$, $i = 1, 2$, linear sind, gilt auch:

$$Kor(Y_1, Y_2 \,.\, X) = \frac{Kor(Y_1, Y_2) - Kor(Y_1, X) \cdot Kor(Y_2, X)}{\sqrt{1 - Kor(Y_1, X)^2} \cdot \sqrt{1 - Kor(Y_2, X)^2}}.$$